大学院情報理工学研究科
博士前期課程一般入試　入学試験問題
（2020年8月18日実施）

【機械知能システム学専攻】

専門科目：［必須問題］

※注意事項

1．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。

2．必須問題の問題冊子はこの注意事項を含めて７枚、解答用紙は４枚である。
（計算用紙は含まない）

3．試験開始の合図の後、すべての解答用紙に受験番号を記入すること。

4．必須問題の試験時間は90分である。

5．必須問題は数学基礎２問、物理学基礎２問である。すべての問題を解答すること。

6．解答には、問題ごとに専用の解答用紙を使用すること。計算用紙に解答を記入しても採点の対象とはならない。必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよいが、その場合は表面の下部に「裏面へ続く」と記入すること。

7．試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

8．試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

9．解答は英語でもよい。

問題は次のページからです。

このページは問題冊子の枚数には
含みません。

必須問題

機械知能システム学専攻

数学基礎

以下の問1，問2に答えよ．

問1. 以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y) = x^3 - 2y^2 + 3xy - y$ の極大値と極小値の存在を調べ，存在するならばその値を求めよ．

(2) $D : x^2 + y^2 \leq 2x$ における $\iint_D \sqrt{2-x}\, dxdy$ の値を求めよ．

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，eは自然対数の底である．

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 5\frac{df(x)}{dx} + 4f(x) = e^{3x} + \sin x \cos x$$

キーワード：Keywords

関数：function, 極大値：local maximum value, 極小値：local minimum value, 存在：existence, 値：value, 微分方程式：differential equation, 一般解：general solution, 自然対数：natural logarithm, 底：base

【次ページに続く】

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2020 年 8 月 18 日実施）

必須問題

機械知能システム学専攻

数学基礎

［前ページから続く］

問 2. 以下の設問に答えよ.

(1) 次の x_1, x_2, x_3 に関する連立 1 次方程式が解をもつとき，定数 a , b が満たすべき条件を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - ax_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(2) $\mathbb{R}^n$ を n 次元の実数空間とし，線形写像 $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次式で定義する.

$$F : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + ax_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

線形写像 F の核 $\mathrm{Ker}\ F$ の基底の 1 つが $[1, b, 1]^\top$ となるとき，定数 a , b の値を求めよ．ただし，記号の右上に付した添え字 ⊤ は転置を表す.

(3) $\boldsymbol{x} = [x_1,\ x_2]^\top, \boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2]^\top$ であり，2 次形式 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ が標準形 $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{B} \boldsymbol{y}$ に変換できるとする．ここで,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & a \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

である．このとき，定数 a , b の値を求めよ．また，x_1, x_2 を用いて y_1, y_2 を表せ.

キーワード：Keywords

連立 1 次方程式：simultaneous linear equations, 解：solution, 定数：constant,
条件：condition, 次元：dimension, 実数空間：real space, 線形写像：linear mapping,
定義：definition, 核：kernel, 基底：basis, 値：value, 添え字：suffix, 転置：transpose,
2 次形式：quadratic form, 標準形：normal form, 変換：transformation

大学院情報理工学研究科　博士前期課程：一般入試（2020 年 8 月 18 日実施）

必須問題

機械知能システム学専攻

物理学基礎

以下の問１，問２に解答せよ．

問１

図１のように，一定の速さvで走る台車の上に地面からの高さhの位置で棒が水平に固定されている．棒は右端及び右端からの長さlの位置 P に集中質量を持つ棒とする（$l > h$）．棒が点 P において折れ，点 P のまわりに回転して床に落ちるとき，折れた棒 AB の運動を考える．棒 AB は右端点 A，左端点 B にそれぞれ質量m_a，m_bの質点を持ち，質点間の質量は無視できるとする．また，重力加速度はgとする．空気抵抗は考えなくてよい．

1：棒 AB は点 P を支点にして回転しながら落ちていく（図２，鉛直方向の初期速度 0）．このとき，右端点 A が地面と衝突するまでの棒 AB の運動を考える．以下の問いに答えよ．

(1a) 棒 AB の点 P 周りの慣性モーメントを求めよ．
(1b) 棒 AB が折れ始めた瞬間の点 P の絶対座標系での位置を原点とする座標系（鉛直上向きを y 軸の正方向とする右手系）において棒 AB の両端点 A, B の位置 r_A，r_Bと速度 v_A，v_Bを示し，棒 AB の運動エネルギーT，ポテンシャルエネルギーUを求めよ．ただし，棒 AB が鉛直線となす角度θ，及び時間tを変数とする．また，ポテンシャルエネルギーは点 P を基準点とする．
(1c) 棒 AB の運動方程式を求めよ．ただし，ラグランジアンは Λを用いて表せ．

2：右端点 A が点 Q において地面に衝突し（図３），左端点 B が点 P から外れ，棒 AB が衝突点 Q を支点にして回転を始めた（図４）．地面との衝突は完全非弾性衝突であり，衝突の直後から左端点 B のまわりに外力は働かないものとする．このとき以下の問いに答えよ．

(2a) 衝突する直前の棒 AB の点 Q まわりの角運動量をL^-とする．衝突直前の棒 AB の角度を$\theta = \theta_0$としたとき，L^-を求めよ．なお，L^-はθ_0を用いない形で表せ．
(2b) 衝突後の棒 AB の鉛直線からの角度をϕとし，衝突直後の角度を$\phi = \phi_0$とする．また，衝突直後の棒 AB の角速度をω_0とする．衝突直後の棒 AB の点 Q 周りの角運動量をL^+としたとき、L^+をω_0を用いて表せ．さらに，角運動量保存則を用いてω_0を求め，l，v，hを用いて表せ．
(2c) 床との衝突後，少しして左端点 B が地面に衝突した．左端点 B が点 P から外れた時刻を$t = 0$としたとき，左端点 B が初めて床と衝突するまでの時間を求めよ．ただし，ϕ_0は $\pi/2$付近とし，$\sin\phi \cong 1$と近似してよい．

【次ページへ続く】

【前ページから続く】

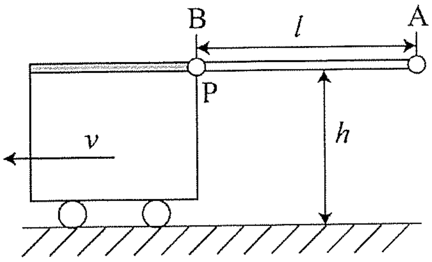

図1

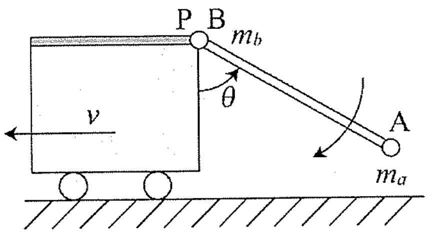

図2

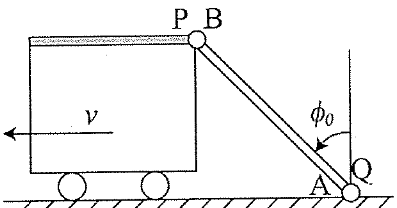

図3

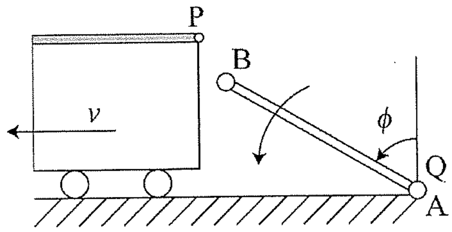

図4

キーワード：Keyword
一定の速さ：constant speed, 台車：Trolley, 地面からの高さ：height from ground, 棒：rod, 水平に固定：fixed horizontally, 右端：right edge, 右端からの長さ：length from right edge, 位置：position, 集中質量を持つ棒：rod with lumped mass, 折れ：snap, 回転：rotate, 床に落ちる：fall on the floor, 左端：left edge, 質量：mass, 質点：point mass, 無視できる：negligible, 重力加速度：gravitational acceleration, 空気抵抗：air resistance, 支点：pivot, 鉛直方向：vertical direction, 初期速度：initial velocity, 地面：ground, 衝突：collision, 慣性モーメント：moment of inertia, 折れ始めた瞬間：at the moment of snap, 絶対座標系：absolute coordinate system, 原点：origin, 座標系：coordinate system, 鉛直上向き：vertically upward, 右手系：right-handed system, 両端点：both ends, 速度：velocity, 運動エネルギー：kinetic energy, ポテンシャルエネルギー：potential energy, 鉛直線：vertical line, 角度：angle, 時間：time, 基準点：reference point, 運動方程式：equation of motion, ラグランジアン：Lagrangian, 外れ：come free from, 完全非弾性衝突：completely inelastic collision, 直後：immediately after, 外力：external force, 直前：immediately before, 角運動量：angular momentum, 角速度：angular velocity, 角運動量保存則：principle of conservation of angular momentum, 時刻：time, 初めて：first time

必須問題

機械知能システム学専攻

物理学基礎

【前ページから続く】

問２．以下の問いに答えよ．

(1)図１に示すように，真空中（誘電率ε_0）に点電荷qを取り囲む任意の閉曲面Sがある．閉曲面S上の微小面dSでの電場ベクトルを$\mathbf{E}$，法線単位ベクトルを$\mathbf{n}$とする．このとき内積$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dS$を立体角$d\Omega$で表わし，閉曲面$S$上にわたって積分することで，ガウスの法則(a)が成り立つことを示せ．
なお電荷qから距離rにある微小面dSを見込む立体角$d\Omega$は$d\Omega=(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})dS/r^3$で定義される．

(2) 図２に示すように真空中で，半径aの導体球を，内半径b，外半径cの導体球殻で同心状に包み，導体球殻に電荷を与えず導体球にのみ電荷Qを与えた．このとき導体球表面の点Ａと導体球殻内表面の点Ｂ間において任意の経路Cを考える．経路C上の微小ベクトル$d\mathbf{s}$を球座標系での単位ベクトル($\mathbf{e}_r$，$\mathbf{e}_\theta$，$\mathbf{e}_\varphi$）を用いて表せ．また，内積$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$を$\mathbf{e}_r$方向の微小長$dr$を用いて表せ．次に，点Ｂを基準とした点Ａの電位Ｖを求めよ．

(3) 図３に示す導体球殻内の球面S_1にガウスの法則(a)を適用し，導体球殻の内面に誘導される電荷Q_1を求めよ．

(4)次に，図４に示す導体球殻の内表面にまたがる微小円柱S_2（円柱の底面の面積dS）にガウスの法則(a)を適用し，導体球殻の内面に誘導される電荷の面密度ωを求めよ．また電荷Q_1を求めよ．

(5)以上より，導体球殻の外部（$c<r$）の電場ベクトル$\mathbf{E}$を求め，$r=\infty$を基準として点Ａの電位を求めよ．

(6)一方，導体球には電荷を与えず導体球殻にのみ電荷Qを与えた．このときの，$r=\infty$を基準として点Ａの電位を求めよ．

(a) $$\int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$ ：ガウスの法則

【次ページに続く】

【前ページから続く】

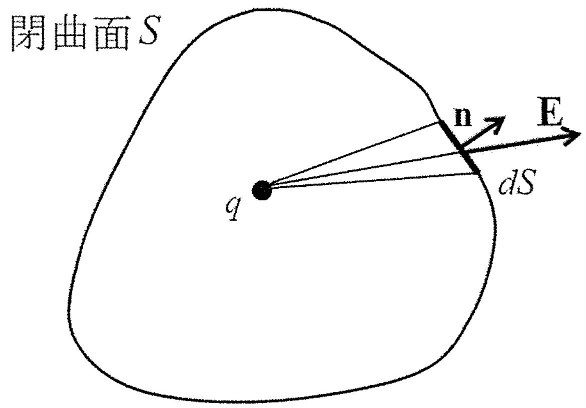

図1

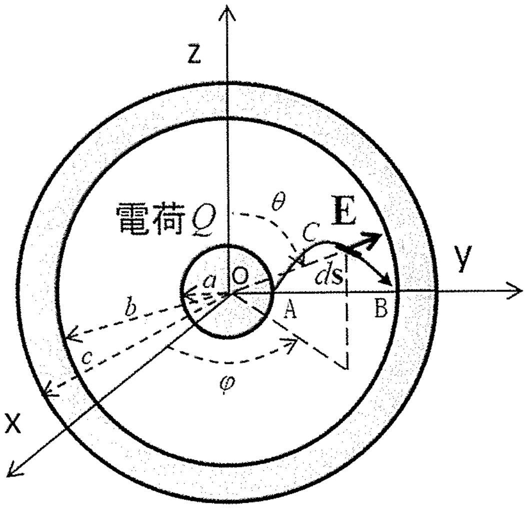

図2

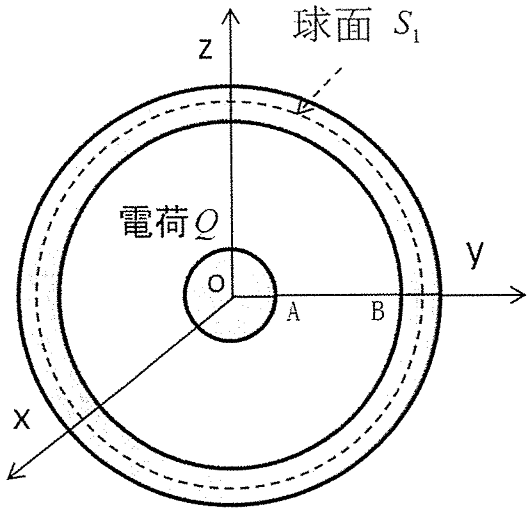

図3

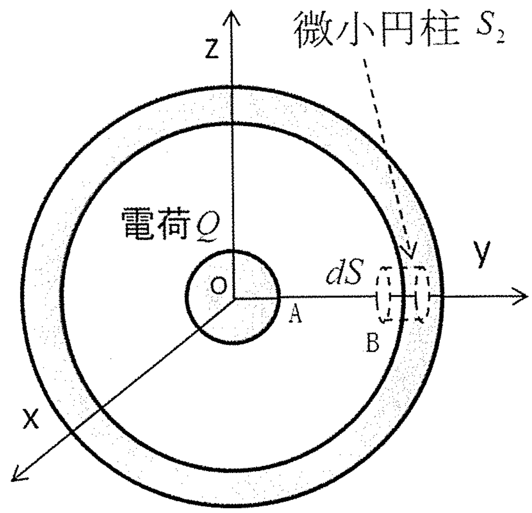

図4

キーワード：Keywords
真空；vacuum，誘電率；permittivity，点電荷；point charge，閉曲面；closed surface，
電場；electric field，法線；normal line，内積；scalar product，立体角；solid angle ，
ガウスの法則；Gauss' law，導体球；spherical conductor，球殻；spherical shell，同心；concentric，
球座標；spherical coordinates，電位；electric potential，円柱；cylindrical column，底面；bottom，
面密度；surface density